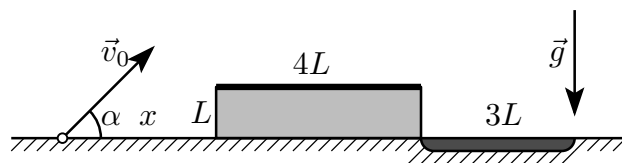


Задача 10.1. Попрыгунчик. Мальчик бросает мяч от поверхности земли под углом $\alpha = 45^\circ$ к горизонту с начальной скоростью v_0 . На расстоянии x от точки броска стоит здание высотой L с плоской твёрдой горизонтальной крышей, а за зданием находится яма. Мальчик хочет, чтобы мяч отскочил от крыши и попал в яму. Длина здания $4L$, длина ямы $3L$, начальная скорость мяча $v_0 = 4\sqrt{\frac{Lg}{3}}$.



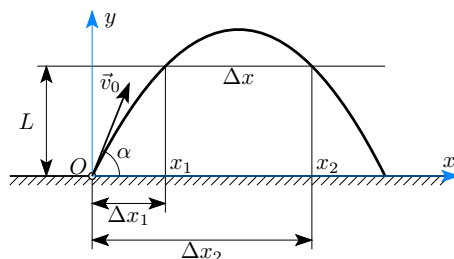
- 1) Какое количество N отскоков мяча от крыши возможно?
- 2) Определите, какой диапазон расстояний l от точки броска до здания соответствуют каждому значению N .
- 3) Определите возможные значения x , при которых мяч попадёт в яму.

Ускорение свободного падения равно g . Отскок мяча от крыши считайте абсолютно упругим. Сопротивлением воздуха пренебречь. От земли, стен здания и ямы мяч не отскакивает.

Решение. Поскольку отскок мяча от крыши абсолютно упругий, скорость мяча при падении на крышу будет равна по модулю скорости при отскоке, и траектория мяча после отскока будет той же параболой, что и траектория при броске, но смещённой по горизонтали.

Введём систему координат xOy , как показано на рисунке. Рассмотрим уравнение траектории мяча в этой системе координат:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} = x - \frac{3}{16} \frac{x^2}{L}. \quad (1)$$



Найдём расстояние Δx между точками отскоков (если их больше одного). Для этого найдём координаты x при высоте, равной L :

$$L = x - \frac{3}{16} \frac{x^2}{L} \Rightarrow \frac{3}{16L} \cdot x^2 - x + L = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot \frac{3L}{16L}}}{2 \cdot \frac{3}{16L}} = \frac{8L}{3} \left(1 \pm \frac{1}{2}\right). \quad (2)$$

Расстояние между точками отскоков:

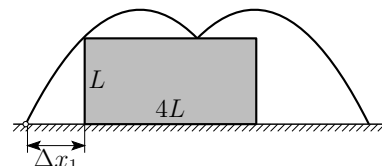
$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{8L}{3}. \quad (3)$$

Длина крыши $4L$ больше Δx , но меньше $2\Delta x$, следовательно, может произойти один или два отскока мяча от крыши.

Для удобства дальнейшего решения введём следующие обозначения: Δx_1 — расстояние по горизонтали от точки броска до первой точки на высоте L , Δx_2 — расстояние от точки броска до второй точки на высоте L (см. рисунок). Тогда

$$\Delta x_1 = x_1 = \frac{4L}{3}, \quad \Delta x_2 = \Delta x + \Delta x_1 = \frac{8L}{3} + \frac{4L}{3} = 4L. \quad (4)$$

Рассмотрим, при каких l может произойти один отскок. Чтобы мяч отскочил от крыши, он должен перелететь через край крыши, то есть $l > \Delta x_1 = \frac{4L}{3}$.



Теперь рассмотрим условие для второго отскока. Второй отскок появится вблизи дальнего от места броска края крыши. При этом $l + 4L = \Delta x_2 + \Delta x$, $l = \Delta x_2 + \Delta x - 4L = 4L + \frac{8L}{3} - 4L = \frac{8L}{3}$. Таким образом, один отскок мяча возможен при

$$\frac{4L}{3} < l < \frac{8L}{3}, \quad \text{или } l \in \left(\frac{4L}{3}, \frac{8L}{3} \right). \quad (5)$$

Наконец, мяч вообще не будет ударяться о крышу, если он не долетит до её края при $l > \Delta x_2 = 4L$. Таким образом, два отскока возможны при

$$\frac{8L}{3} < l < 4L, \quad \text{или } l \in \left(\frac{8L}{3}, 4L \right). \quad (6)$$

Рассмотрим условия попадания мяча в яму. При одном отскоке расстояние от места броска до точки падения мяча на землю будет равно $2\Delta x_2 = 8L$, а расстояние по горизонтали от дальнего края здания до точки броска равно $8L - l - 4L$, что должно быть меньше длины ямы $3L$:

$$8L - l - 4L < 3L \Rightarrow l > L. \quad (7)$$

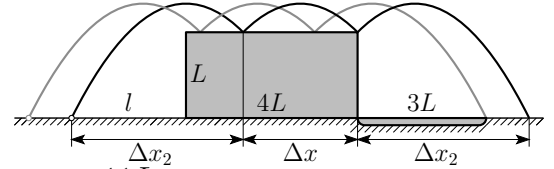
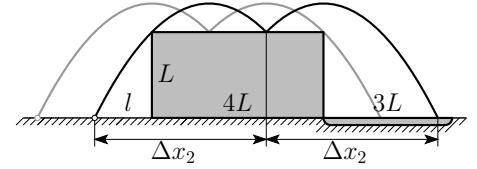
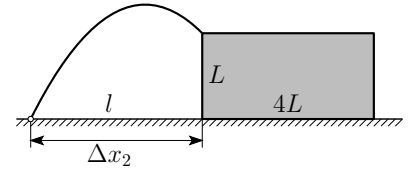
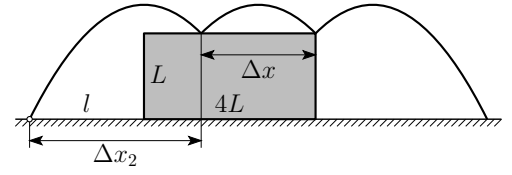
Легко видеть, что это неравенство выполняется всегда при выполнении условия одного отскока мяча от крыши (неравенство (5)).

Теперь рассмотрим случай двух отскоков. Расстояние между точками броска и падения мяча на землю будет равно $2\Delta x_2 + \Delta x = 8L + \frac{8L}{3} = 10\frac{2}{3}L$. Расстояние по горизонтали от края здания до точки падения

$$10\frac{2}{3}L - l - 4L < 3L \Rightarrow l > \frac{11L}{3}. \quad (8)$$

Совместно с неравенством (6), это выражение определяет условие попадания мяча в яму при двух отскоках: $\frac{11L}{3} < l < 4L$. Окончательно получаем условие попадания мяча в яму:

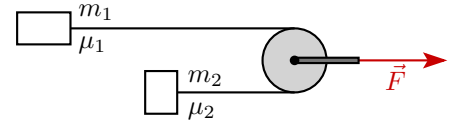
$$l \in \left(\frac{4L}{3}, \frac{8L}{3} \right) \cup \left(\frac{11L}{3}, 4L \right). \quad (9)$$



Критерии оценивания задачи 10.1. Попрыгунчик.

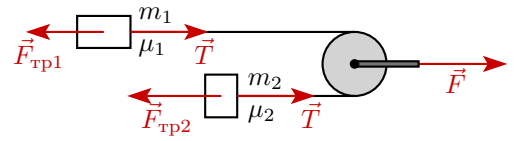
№	Критерий	Значение	Макс. балл
1	Корректно записано уравнение траектории движения или иные кинематические соотношения, позволяющие определить расстояния $\Delta x, \Delta x_1, \Delta x_2$	Формула (1)	1
2	Определено расстояние между точками отскока мяча Δx	$\frac{8L}{3}$	2
3	Определено, что мяч будет отскакивать от крыши один или два раза		1
4	Определены расстояния $\Delta x_1, \Delta x_2$ или эквивалентные	$\Delta x_1 = \frac{4L}{3}, \Delta x_2 = 4L$	1
5	Определено условие одного отскока мяча от крыши	$l \in \left(\frac{4L}{3}, \frac{8L}{3}\right)$	1
6	Определено условие двух отскоков мяча от крыши	$l \in \left(\frac{8L}{3}, 4L\right)$	1
7	Определено условие попадания мяча в яму при одном отскоке	$l \in \left(\frac{4L}{3}, \frac{8L}{3}\right)$	1
8	Определено условие попадания мяча в яму при двух отскоках	$l \in \left(\frac{11L}{3}, 4L\right)$	1
9	Записано полное условие попадания мяча в яму	$l \in \left(\frac{4L}{3}, \frac{8L}{3}\right) \cup \left(\frac{11L}{3}, 4L\right)$ или аналогичное	1

Задача 10.2. Ускорения на блоке. На горизонтальной поверхности находится система, состоящая из двух грузов массами $m_1 = 200$ г и $m_2 = 300$ г. Грузы связаны нерастяжимой нитью пренебрежимо малой массы, перекинутой через очень лёгкий блок. На ось блока действует горизонтальная сила F , постепенно увеличивающаяся от нулевого значения. Определите ускорения тел и оси блока в зависимости от величины силы F . Коэффициенты трения скольжения тел по поверхности известны и равны $\mu_1 = 0,2$ для первого тела и $\mu_2 = 0,1$ для второго тела. Свободные участки нити горизонтальны. Трение в блоке отсутствует. На рисунке представлен вид системы сверху. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².



Решение. Расставим силы, действующие в системе. Силы тяжести и силы нормальной реакции не указаны.

Так как нить и блок невесомы, трения в блоке нет, то сила натяжения нити T одинакова по всей длине и равна $F/2$.



$$T = \frac{F}{2} \quad (1)$$

С увеличением значения силы F увеличивается сила натяжения, когда сила натяжения превысит максимальное значение силы трения покоя для какого-либо из тел, тело придёт в движение. При различных значениях силы F возможны следующие случаи движения тел в системе:

Случай 1. Все тела покоятся.

Случай 2. Одно тело покоится, другое тело и блок движутся ускоренно.

Случай 3. Все тела движутся.

Рассмотрим случай 1. Определим максимальные значения сил трения покоя для обоих грузов

$$\begin{aligned} F_{\text{тр max 1}}^{\text{ск}} &= \mu_1 m_1 g; & F_{\text{тр max 1}}^{\text{ск}} &= 0,2 \cdot 0,2 \text{ кг} \cdot 10 \text{ м/с}^2 = 0,4 \text{ Н}; \\ F_{\text{тр max 2}}^{\text{ск}} &= \mu_2 m_2 g; & F_{\text{тр max 2}}^{\text{ск}} &= 0,1 \cdot 0,3 \text{ кг} \cdot 10 \text{ м/с}^2 = 0,3 \text{ Н}. \end{aligned} \quad (2)$$

Таким образом, видим, что при $T \leq 0,3$ Н и $F \leq 0,6$ Н система покоится, ускорения всех тел равны нулю.

Если $0,3 \text{ Н} < T \leq 0,4 \text{ Н}$ и $0,6 \text{ Н} < F \leq 0,8 \text{ Н}$, то второй груз и блок приходят в движение, а первое продолжает покоиться. Ускорение второго груза определим из второго закона Ньютона

$$\begin{aligned} m_2 a_2 &= T - \mu_2 m_2 g; \\ a_2 &= \frac{F}{2m_2} - \mu_2 g. \end{aligned} \quad (3)$$

Из условия нерастяжимости нити следует, что в случае, когда первый груз неподвижен, ускорение оси блока $a_{\text{бл}}$ вдвое меньше ускорения второго груза:

$$a_{\text{бл}} = \frac{a_2}{2} = \frac{F}{4m_2} - \frac{\mu_2 g}{2} \quad (4)$$

Если $T > 0,4$ Н и $F > 0,8$ Н, то движутся оба груза. Ускорение второго груза мы уже нашли ранее, а ускорение первого определяется из второго закона Ньютона

$$\begin{aligned} m_1 a_1 &= T - \mu_1 m_1 g; \\ a_1 &= \frac{F}{2m_1} - \mu_1 g. \end{aligned} \quad (5)$$

Определим ускорение блока. Для этого воспользуемся «известным фактом», что при неподвижной оси блока ускорения грузов равны по модулю и противоположны по направлению. Блок может двигаться только вправо. Для того, чтобы воспользоваться «известным фактом», перейдём в систему отсчёта, связанную с блоком и движущуюся вправо с ускорением $a_{\text{бл}}$.

Ускорение первого груза в движущейся системе отсчёта равно

$$\vec{a}'_1 = \vec{a}_1 - \vec{a}_{\text{бл}}. \quad (6)$$

Ускорение второго груза в этой системе отсчёта равно

$$\vec{a}'_2 = \vec{a}_2 - \vec{a}_{\text{бл}}. \quad (7)$$

Так как в этой системе отсчёта блок неподвижен, то грузы движутся с одинаковыми по модулю, но противоположно направленными ускорениями, поэтому

$$\vec{a}'_1 = -\vec{a}'_2. \quad (8)$$

Из записанных выражений находим ускорение оси блока

$$\vec{a}_{\text{бл}} = \frac{\vec{a}_2 + \vec{a}_1}{2}. \quad (9)$$

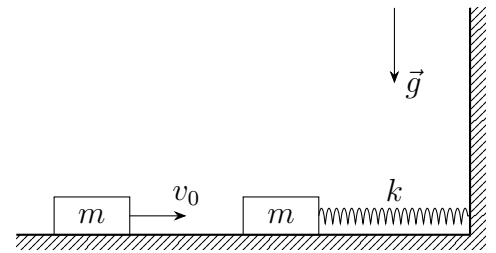
Проецируя на ось OX , получим

$$a_{\text{бл}} = \frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{F}{2m_1} + \frac{F}{2m_2} - (\mu_1 + \mu_2)g \right). \quad (10)$$

Критерии оценивания задачи 10.2. Ускорения на блоке.

№	Критерий	Значение	Макс. балл
1	Сила натяжения нити равна $F/2$		0,5
2	Указано, что при различных значениях силы F возможны три варианта движения		1
3	В явном виде написано про равенство сил трения покоя и силы трения скольжения		0,5
4	Рассчитаны значения сил трения скольжения для каждого из тел	$F_{\text{тр max 1}}^{\text{ск}} = 0,4 \text{ Н},$ $F_{\text{тр max 2}}^{\text{ск}} = 0,3 \text{ Н}.$	0,5
5	Записано условие покоя системы	$F \leq 0,6 \text{ Н}$	1
6	Рассмотрен случай $0,6 \text{ Н} < F \leq 0,8 \text{ Н}$: • отмечено, что второй груз движется, а первый покоится • найдено ускорение второго груза • найдено ускорение оси блока	$\frac{F}{2m_2} - \mu_2 g$ $\frac{F}{4m_2} - \frac{\mu_2 g}{2}$	2,5 из них: 0,5 1 1
7	Рассмотрен случай $F > 0,8 \text{ Н}$: • отмечено, что оба груза движутся • найдено ускорение первого груза • правильно и обоснованно найдено ускорение оси блока	$\frac{F}{2m_1} - \mu_1 g$ $\frac{1}{2} \left(\frac{F}{2m_1} + \frac{F}{2m_2} - (\mu_1 + \mu_2)g \right)$	4 из них: 0,5 1 2,5

Задача 10.3. Максимумы деформаций. На горизонтальной шероховатой поверхности покоится брусок массой $m = 0,5$ кг. Брусок соединён с вертикальной стенкой с помощью горизонтальной и перпендикулярной стенке недеформированной пружины. Жёсткость пружины $k = 72$ Н/м. В сторону покоящегося бруска движется такой же брусок. Между брусками происходит абсолютно неупругое столкновение, в результате которого они не слипаются. Прямо перед столкновением скорость движущегося бруска $v_0 = 6$ м/с. В процессе движения брусков после столкновения величина максимального сжатия пружины оказалась равной $x_1 = 34$ см, при этом бруски со стенкой не сталкивались. Считайте горизонтальную поверхность однородной. Явлением застоя, сопротивлением воздуха и временем столкновения можно пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².



- 1) Какое количество теплоты Q выделилось в результате столкновения брусков?
- 2) Найдите коэффициент трения μ между брусками и горизонтальной поверхностью.
- 3) Определите максимальное удлинение пружины x_2 в процессе движения брусков.

Решение. 1) Сразу после столкновения бруски движутся с одинаковой скоростью. Обозначим её за v . Поскольку сила трения является конечной, а столкновение – быстрым, для брусков выполняется закон сохранения импульса:

$$mv_0 = 2mv \Rightarrow v = v_0/2.$$

Выделившееся в результате столкновения количество теплоты Q равняется убыли кинетической энергии системы. Получим:

$$Q = \frac{mv_0^2}{2} - \frac{2mv^2}{2} = \frac{mv_0^2}{4} = 4,5 \text{ Дж.}$$

2) После столкновения брусков оба они движутся по направлению к стенке, а пружина начинает сжиматься. Это приводит к тому, что при движении по направлению к стенке бруски будут контактировать друг с другом, т.е. двигаться с равными скоростями, а значит, их можно рассматривать как единое целое.

Воспользуемся теоремой об изменении механической энергии для системы из брусков и пружины от момента сразу после столкновения до момента максимального сжатия пружины:

$$E_k + A_{\text{тр}} = W_p,$$

где $E_k = 2mv^2/2 = mv_0^2/4$ – суммарная кинетическая энергия брусков сразу после столкновения, $W_p = kx_1^2/2$ – потенциальная энергия пружины в момент максимального сжатия, а $A_{\text{тр}} = -2\mu mgx_1$ – работа сил трения, действующих на бруски. Таким образом:

$$\frac{mv_0^2}{4} - 2\mu mgx_1 = \frac{kx_1^2}{2},$$

откуда:

$$\mu = \frac{v_0^2}{8gx_1} - \frac{kx_1}{4mg} \approx 0,10.$$

3) После первой остановки бруски придут в движение в направлении от стены при условии, если сила упругости превысит сумму сил трения скольжения, действующих на бруски. Проверим, выполняется ли данное условие:

$$F_{\text{упр}} = kx_1 \approx 24 \text{ Н}, F_{\text{тр}} = 2\mu mg \approx 1 \text{ Н}.$$

Таким образом, бруски начнут движение в направлении от стены.

Пусть в некоторый момент удлинение пружины оказывается равным x , а бруски движутся без отрыва друг от друга с ускорением a_x в проекции на ось x , направленную от стены. Рассматривая систему как единое целое, из второго закона Ньютона получим:

$$2ma_x = -kx - 2\mu mg.$$

Рассмотрим брусок, не прикрепленный к пружине. Из второго закона Ньютона для него получим:

$$ma_x = N - \mu mg \Rightarrow N = ma_x + \mu mg = -\frac{kx}{2} < 0.$$

Найденная нами сила N взаимодействия брусков оказывается отрицательной при $x > 0$, что невозможно. Таким образом, в момент, когда пружина окажется недеформированной, бруски перестанут контактировать и далее будут двигаться по отдельности друг от друга.

Определим скорость u брусков в момент прекращения контакта между ними. Воспользуемся теоремой об изменении механической энергии для системы из брусков и пружины от момента начала движения от стены до момента прекращения контакта:

$$W_p + A_{\text{тр}} = E_k,$$

где $W_p = kx_1^2/2$, $E_k = 2mu^2/2$, $A_{\text{тр}} = -2\mu mgx_1$. Отсюда:

$$u = \sqrt{\frac{kx_1^2}{2m} - 2\mu gx_1} = \sqrt{\frac{kx_1^2}{m} - \frac{v_0^2}{4}} \approx 2,8 \text{ м/с}.$$

Величина u^2 оказывается положительной, поэтому в процессе движения пружина действительно вновь окажется недеформированной.

Применим теорему об изменении механической энергии для системы из пружины и прикрепленного к ней бруска от момента прекращения контакта между брусками до момента достижения максимального удлинения пружины:

$$E_k + A_{\text{тр}} = W_p,$$

где $E_k = mu^2/2$, $W_p = kx_2^2/2$, $A_{\text{тр}} = -\mu mgx_2$. Имеем:

$$\frac{kx_2^2}{2} = \frac{mu^2}{2} - \mu mgx_2 = \frac{kx_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{8} - \left(\frac{mv_0^2}{8x_1} - \frac{kx_1}{4}\right)x_2.$$

Мы получили квадратное уравнение относительно x_2 :

$$x_2^2 + \frac{x_2}{2} \left(\frac{mv_0^2}{2kx_1} - x_1 \right) - \left(x_1^2 - \frac{mv_0^2}{4k} \right) = 0.$$

Решая полученное квадратное уравнение и выбирая положительный корень, находим:

$$x_2 = -\frac{1}{4} \left(\frac{mv_0^2}{2kx_1} - x_1 \right) + \sqrt{\frac{1}{16} \left(\frac{mv_0^2}{2kx_1} - x_1 \right)^2 + \left(x_1^2 - \frac{mv_0^2}{4k} \right)} \approx 22 \text{ см}.$$

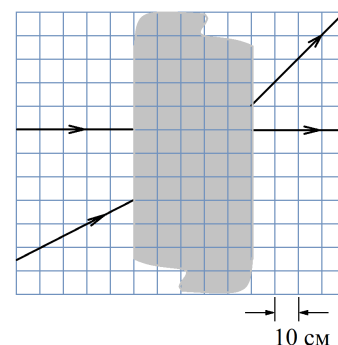
Критерии оценивания задачи 10.3. Максимумы деформаций.

№	Критерий	Значение	Макс. балл
1.1	Определена скорость v брусков сразу после столкновения	$v = \frac{v_0}{2}$	0,75
1.2	Найдена суммарная кинетическая энергия брусков E_k сразу после столкновения	$E_k = \frac{mv_0^2}{4}$	0,25
1.3	Использовано, что выделившееся в результате столкновения количество теплоты Q равно убыли кинетической энергии системы		0,5
1.4	Найдено количество теплоты Q (по 0,25 балла за выражение и численное значение)	$Q = \frac{mv_0^2}{4} = 4,5 \text{ Дж}$	0,5
2.1	Указано или используется, что после столкновения бруски движутся по направлению к стенке без отрыва друг от друга.		0,25
2.2	Записана теорема об изменении механической энергии для системы из брусков и пружины от момента сразу после столкновения до момента, когда сжатие пружины максимально.	$E_k + A_{\text{тр}} = W_p$	1,0
2.3	Записано выражение для потенциальной энергии упругой деформации пружины W_p в момент максимального сжатия	$W_p = \frac{kx_1^2}{2}$	0,25
2.4	Записано выражение для суммарной работы сил трения $A_{\text{тр}}$	$A_{\text{тр}} = -2\mu mgx_1$	0,5
2.5	Найден коэффициент трения μ (по 0,5 балла за выражение и численное значение)	$\mu = \frac{v_0^2}{8gx_1} - \frac{kx_1}{4mg} \approx 0,10.$	1,0
3.1	Явно проверено, что бруски после остановки начнут движение в направлении от стенки. <i>Если найдена скорость брусков в момент, когда пружина недеформирована и указано, что она является положительной – пункт оценивается в полный балл</i>		0,5

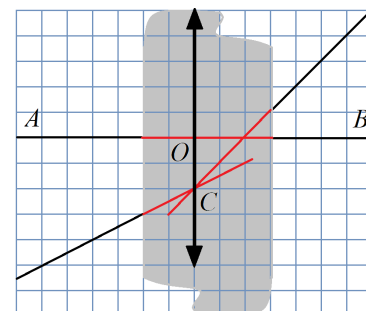
3.2	Показано, что в момент, когда пружина становится недеформированной, бруски прекращают контактировать друг с другом.		1,0
3.3	Записана теорема об изменении механической энергии для системы из брусков и пружины от момента, когда бруски начинают движение в направлении от стенки до момента, когда пружина становится недеформированной	$\frac{kx_1^2}{2} - 2\mu mgx_1 = \frac{2mu^2}{2}$	1,0
3.4	Проверено, что величина u^2 является положительной и сделан вывод, что пружина будет растянута		0,5
3.5	Записана теорема об изменении механической энергии системы из пружины и прикреплённого к ней бруска от момента прекращения контакта между брусками до момента максимального удлинения пружины	$\frac{mu^2}{2} - \mu mgx_2 = \frac{kx_2^2}{2}$	1,0
3.6	Найдено максимальное удлинение пружины x_2 . Ставится по 0,5 балла за численное значение и формульное выражение (в представленном или математически ему эквивалентном виде): $x_2 = -\frac{1}{4} \left(\frac{mv_0^2}{2kx_1} - x_1 \right) + \sqrt{\frac{1}{16} \left(\frac{mv_0^2}{2kx_1} - x_1 \right)^2 + \left(x_1^2 - \frac{mv_0^2}{4k} \right)} \approx 22 \text{ см}$		1,0

Задача 10.4. Вести из архивов. В архиве некоторой малоизвестной оптической лаборатории был найден рисунок, изображающий ход двух лучей через тонкую идеальную линзу. К сожалению, на наиболее важной части рисунка чернила очень выцвели. В записях нашли фразу о том, что один из лучей идёт по главной оптической оси. Определите:

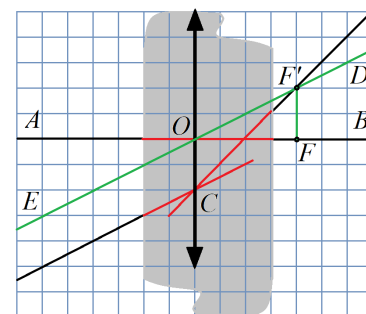
- положение оптического центра линзы O ;
- тип линзы (собирающая или рассеивающая);
- фокусное расстояние линзы F .



Решение. Известно, что луч, идущий по главной оптической оси, не преломляется. Следовательно, прямая AB является главной оптической осью линзы. Продолжим два других луча до точки пересечения C . Эта точка лежит на преломляющей поверхности линзы. Проведя перпендикуляр из точки C к главной оптической оси линзы AB , получим её поверхность.



Для определения положения фокуса линзы сделаем следующее: через оптический центр линзы проведём прямую, параллельную падающему лучу. Эта прямая является побочной оптической осью линзы, луч, идущий по ней, не преломляется. Прямая EF' пересекается в преломлённом луче в точке F' , которая является побочным фокусом, то есть находится в фокальной плоскости линзы. Положение фокуса линзы F определим, опустив перпендикуляр из F' на главную оптическую ось.

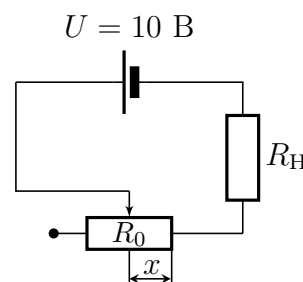


Получаем, что фокусное расстояние линзы составляет 4 клетки, следовательно, равно $F = 40$ см. Линза собирающая.

Критерии оценивания задачи 10.4. Вести из архивов.

№	Критерий	Значение	Макс. балл
1	Проведена оптическая ось линзы		1
2	Наклонные лучи продолжены до точки пересечения		1
3	Указано, что точка пересечения лучей из п. 2 лежит на преломляющей поверхности линзы		1
4	Восстановлен оптический центр линзы		1
5	Проведена побочная оптическая ось		1
6	Найден побочный фокус линзы		1
7	Восстановлена фокальная плоскость, определено положение фокуса		2
8	Указано, что линза собирающая		1
9	Определено фокусное расстояние	$F = 40$ см	1

Задача 10.5. Неопределённый резистор. Школьник собрал цепь из идеального источника питания с постоянным напряжением $U = 10$ В, нагрузочного резистора R_H и реостата с максимальным сопротивлением R_0 . Сопротивление реостата изменится по закону $R = R_0 \cdot x$, где x — положение ползунка реостата, выраженное в долях от его полной длины, $0 \leq x \leq 1$. Школьник измерил зависимость мощности P_H , выделяющейся на нагрузочном резисторе R_H , от положения ползунка x . Экспериментально полученные им результаты приведены в таблице ниже.



x	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
P_H , Вт	0,38	0,29	0,21	0,16	0,13	0,11

- 1) Получите теоретическое выражение для мощности на нагрузочном резисторе P_H как функцию положения ползунка реостата x .
- 2) Выражение из п. 1) преобразуйте к виду $y = k \cdot x + b$, где x задаёт положение ползунка реостата, а y зависит от мощности P_H .
- 3) Постройте график экспериментальной зависимости $y(x)$ на имеющемся листке с сеткой и графически определите параметры k и b . С помощью данных параметров определите сопротивление нагрузочного резистора R_H и максимальное сопротивление реостата R_0 .
- 4) Определите, какое минимальное положение x_{\min} можно выставить на реостате в данной схеме подключения, если предельная допустимая мощность на реостате (при $x = 1$) составляет $P_{\text{пред}} = 1,5$ Вт. Ответ округлите до сотых.

Решение. Мощность тока определяется формулой:

$$P = I^2 R. \quad (1)$$

Закон Ома:

$$I = \frac{U}{R_{\text{цепи}}}. \quad (2)$$

Соединение последовательное, то есть $R_{\text{цепи}} = R_H + R_0 x$. Тогда мощность тока на нагрузочном резисторе

$$P_H = \frac{U^2 R_H}{(R_H + R_0 x)^2}. \quad (3)$$

Извлечём квадратный корень, умножим на $(R_H + R_0 x)$ и поделим на $\sqrt{P_H R_H}$, в результате чего получим

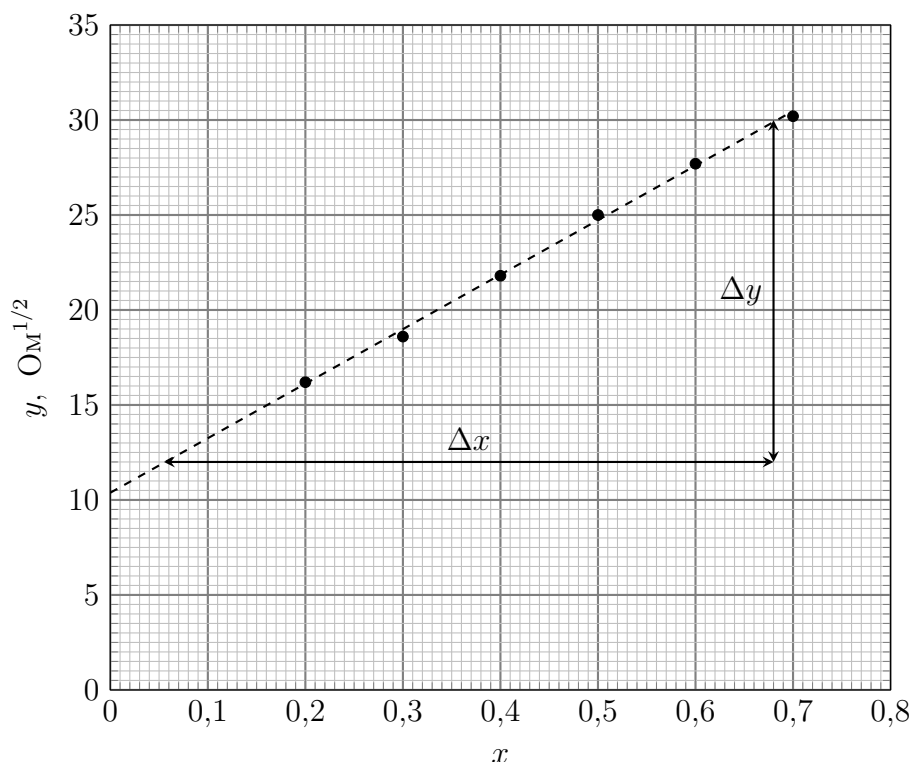
$$\frac{U}{\sqrt{P_H}} = \frac{R_0}{\sqrt{R_H}} x + \sqrt{R_H}. \quad (4)$$

Сравнивая полученное уравнение с уравнением $y = kx + b$, установим, что

$$y = \frac{U}{\sqrt{P_H}}, \quad k = \frac{R_0}{\sqrt{R_H}}, \quad b = \sqrt{R_H}. \quad (5)$$

График зависимости $y(x)$ будет иметь вид прямой линии (а выполненная нами процедура называется линеаризация), коэффициент k можно найти по угловому коэффициенту прямой, коэффициент b — по точке пересечения прямой с осью Oy . Вычисляем значения y , заносим их в таблицу, строим график:

P_H , Вт	0,38	0,29	0,21	0,16	0,13	0,11
x	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7
y , Ом ^{1/2}	16,2	18,6	21,8	25,0	27,7	30,2



Как видно, точки не ложатся идеально на прямую линию, что связано с неточностью измеренных значений. По графику находим:

$$b \approx 10,5 \text{ Ом}^{1/2}, \quad k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{30 - 12}{0,68 - 0,06} \approx 29 \text{ Ом}^{1/2}. \quad (6)$$

С помощью коэффициентов b и k найдём сопротивление нагрузочного резистора R_H , максимальное сопротивление реостата R_0 :

$$R_H = b^2 \approx 110 \text{ Ом}, \quad R_0 = k\sqrt{R_H} \approx 304 \text{ Ом}. \quad (7)$$

В последнем вопросе требуется определить значение x_{\min} ползунка реостата, при котором реостат ещё выдерживает нагрузку. По условию, предельная мощность измерялась, когда ток шёл по всему реостату, т.е. когда $x = 1$.

$$P_{\text{пред}} = I_{\text{пред}}^2 \cdot R_0. \quad (8)$$

Тогда предельный ток, который может проходить через витки реостата

$$I_{\text{пред}} = \sqrt{\frac{P_{\text{пред}}}{R_0}} \approx 0,07 \text{ А}. \quad (9)$$

Предельная нагрузка на реостат определяется именно силой тока, а не номинальной мощностью $P_{\text{пред}}$, так как сопротивление реостата изменяется, и нужно пользоваться интенсивной величиной, а не экстенсивной. С другой стороны, сила тока в контуре:

$$I = \frac{U}{R_H + R_0 \cdot x}. \quad (10)$$

Минимальное значение ползунка x_{\min} определяется из условия $I = I_{\text{пред}}$:

$$x_{\min} = \left(\frac{U}{I_{\text{пред}}} - R_{\text{Н}} \right) \cdot \frac{1}{R_0} = \left(U \sqrt{\frac{R_0}{P_{\text{пред}}}} - R_{\text{Н}} \right) \cdot \frac{1}{R_0} \approx 0,11. \quad (11)$$

Критерии оценивания задачи 10.5. Неопределённый резистор.

№	Критерий	Значение	Макс. балл
1	Выведена формула зависимости мощности на нагрузочном резисторе $P_{\text{Н}}$ от положения ползунка реостата.	Формула (3) или эквивалентная	2
2	Определена формула для величины y в линейной зависимости $y = kx + b$. Найдены выражения для коэффициентов k, b .	Формула (4) или эквивалентная	2
3	Построен график функции $y(x)$, что включает в себя: <ul style="list-style-type: none"> • подписаны оси, • поставлены точки, • выбран подходящий масштаб, чтобы график занимал большую часть места, • проведена прямая. 		2, из них: 0,5 0,5 0,5 0,5
4	Определена величина $R_{\text{Н}}$ с точностью не хуже ± 20 Ом.	$R_{\text{Н}} = 110$ Ом	1
5	Определена величина R_0 с точностью не хуже ± 40 Ом.	$R_0 = 304$ Ом	1
6	Определение минимально допустимого положения ползунка x_{\min} : <ul style="list-style-type: none"> • Рассуждения о том, что ограничивающим фактором является сила тока через реостат. • Выражение для x_{\min} • Определено значение x_{\min} 	<ul style="list-style-type: none"> • Явно написано или использовано в формулах • Формула (11) или эквивалентная ей • $x_{\min} = 0,11$ с точностью до $\pm 0,02$ 	2, из них: 0,5 1 0,5